**FUNDAMENTOS DE TEORÍA DE LA COMPUTACIÓN 2018**

**PARTE 2: LÓGICA E INTELIGENCIA ARTIFICIAL**

**PRÁCTICA 4**

**DEFINICIONES IMPORTANTES**

Un predicado es “lo que se afirma de un sujeto en una proposición” (D.R.A.E.).

**Para este tipo de ejercicios es importante definir:**

**SINTAXIS:**

**U =** Un universo del discurso U, que es un conjunto no vacío de objetos.

**F =** Un conjunto finito F de funciones, cada una de las cuales asigna a una determinada cantidad de objetos o argumentos de U a un objeto de U.

**P =** Un conjunto finito P de relaciones entre los objetos de U.

***SEMÁNTICA:***

**I =** Dados un lenguaje y un dominio, una interpretación I es una función que hace corresponder a los elementos del lenguaje con los elementos del dominio, satisfaciendo las siguientes condiciones:

* Si ci es un símbolo de constante, entonces I(ci) ∈ U (los símbolos de constantes representan objetos del universo del discurso).
* Si fⁿi es un símbolo de función de grado n, entonces I(fⁿi) = Uⁿ→U (los símbolos de función representan funciones del dominio).
* Si Pⁿi es un símbolo de predicado de grado n, entonces I(Pⁿi) ⊆ Uⁿ (los símbolos de predicado representan relaciones del dominio).

**Diferencia entre Relación y función:**

En matemática, **Relación** es la correspondencia de un primer conjunto, llamado Dominio , con un segundo conjunto, llamado Recorrido o Rango , de manera que a cada elemento del Dominio le corresponde uno o más elementos del Recorrido o Rango.

Por ejemplo la operación de “<” implica una relación. Si tomamos el valor 2, 2 es menor que 4 pero también es menor que 10 o 3402.

Por su parte, una **Función** es una relación a la cual se añade la condición de que a cada valor del Dominio le corresponde uno y sólo un valor del Recorrido. Si tomamos el ejemplo de la función sucesor, a partir de un número x (perteneciente a los naturales) siempre nos va a devolver x+1.

**Ejercicio 1.**

**Expresar en un lenguaje de predicados de primer orden las siguientes afirmaciones:**

1. **“Algunas aves no vuelan”**
2. **“No todas las aves vuelan”**

**Analizar la relación entre ambas. Mostrar cómo se puede transformar una expresión en la otra.**

|  |  |
| --- | --- |
| U | U es el conjunto de todas las aves |
| P | {P1} |
| F | { } (No son necesarias funciones). |
| I | I(P1(x)) = “x vuela” |

**“Algunas aves no vuelan”**

∃(x)( ¬ P1(x) )

**“No todas las aves vuelan”**

¬(∀(x) (P1(x))

Generalmente cuando trabajo con ∃ utilizó “^”’. Generalmente con el para todo utilizo implicación.

*También pudimos no haber restringido nuestro universo al conjunto de las aves. En ese caso, las resoluciones hubieran sido:*

*A(x): “x es un ave”*

*V(x): “x vuela”*

* ***“Algunas aves no vuelan”:*** *(∃x) (A(x) ^ ¬ V(x))*
* ***“No todas las aves vuelan”:*** *¬(∀(x)) (A(x) → V(x))*

**Analizar la relación entre ambas. Mostrar cómo se puede transformar una expresión en la otra.**

Ambas expresiones significan lo mismo. Decir que “no todas cumplen una condición” es lo mismo a decir que “existen algunas que no lo cumplen”.

**Relación cuantificador universal y el cuantificador existencial**

Dada una expresión P(x), según el cuantificador universal se puede transformar en otra equivalente con el cuantificador existencial:

|  |
| --- |
| ∀(x) P(x) ⇔ ¬ ∃(x) ¬ P(x) |

que podríamos leer: si para todo x se cumple P(x) no existe un x que no cumpla P(x).

**Ejercicio 2.**

**Escribir las siguientes proposiciones usando un lenguaje de predicados de primer orden:**

**i. El cero es el menor natural.**

|  |  |
| --- | --- |
| Símbolos | c1 será el símbolo de constante para representar el cero.  P2 será el símbolo de predicado para representar mayor igual. |
| U | U = N, es decir, nuestro universo son los números naturales |
| P | { P2 } |
| F | { } (No son necesarias funciones) |
| I | I(c1) es el cero de los naturales.  I(P2(x1, x2)) = x1 ≥ x2 |

Podemos escribir esto de dos formas:

¬ (∃(x) (P2(c1, x2)))

∀(x) P2(x, c1)

**ii. El conjunto vacío está incluido en cualquier conjunto.**

|  |  |
| --- | --- |
| Símbolos | c1 será el símbolo de constante para representar el conjunto vacío.  P2 será el símbolo de predicado para representar la inclusión. |
| U | U = { x / x es un conjunto de elementos } |
| F | { } |
| P | { P2 } |
| I | |(c1) = Ø  I(P2(x1, x2)) = x1 ⊂ x2 |

Resolución:

∀(x) P2(c1, x2)

**iii. Si se prueba una propiedad para el cero y luego se prueba que esa misma propiedad vale para el número n+1 si vale para n, entonces se ha probado que la propiedad vale para cualquier natural.**

|  |  |
| --- | --- |
| Símbolos | c1 será el símbolo de constante para representar el cero.  P11 será el símbolo de predicado para representar un número.  P12 será el símbolo de predicado para representar una propiedad.  P2 será el símbolo de predicado para representar la satisfacción de la propiedad. |
| U | U = N U { y / y es una propiedad } |
| F | {} |
| P | { P11, P12, P2 } |
| I | I(c1) = 0  I(P11(x)) = “x es un número natural”  I(P12(x)) = “x es una propiedad”  I(P2(x, y)) = “x satisface la propiedad y”. |

Resolución:

∃(y) P12(y) ( ( P2(c1, y) ) ^ ( (P11(x) → P2(x+1, y) ) ) → ( (∀(z) P11(z) ^ P2(z,y) )

|  |
| --- |
| *Otra versión, abstrayendo la propiedad y modelándola en un predicado, es la siguiente:*  *U = N*  *I(c1) = 0*  *I(f(x)) = suc(x)*  *I(P(x)) = “x cumple la propiedad”*  *∀(x)( P(c1) ^ ( P(x) → P(f(x)) ) ) → ∀(x)P(x)* |

**iv. Si hay un número natural que cumple una cierta propiedad, entonces hay un mínimo natural que cumple esa propiedad.**

|  |  |
| --- | --- |
| Símbolos | P11 será el símbolo de predicado para representar un número.  P12 será el símbolo de predicado para representar una propiedad.  P21 será el símbolo de predicado para representar la satisfacción de la propiedad.  P22 será el símbolo de predicado para representar la relación ≥ |
| U | U = N U { y / y es una propiedad } |
| F | { } |
| P | { P11, P12, P21, P22} |
| I | I(P11(x)) = “x es un número natural”  I(P12(x)) = “x es una propiedad”  I(P21(x, y)) = “x satisface la propiedad y”  I(P22(x, y)) = “x ≥ y” |

Resolución:

∃(x)∃(z) (P11(x) ^ P12(z) ^ P21(x, z)) → (∃(y) (P11(y) ^ P22(x, y) ^ P21(y,z)) )

|  |
| --- |
| *Otra versión, abstrayendo la propiedad y modelándola en un predicado, es la siguiente:*  *U = N*  *I(f(x)) = suc(x)*  *I(P(x)) = “x cumple la propiedad”*  *I(S(x, y)) = “x < y”*  *∀(x1)( P(x1) → E(x2)( S(x2, x1) ^ P(x2) )* |

**Ejercicio 3.**

**Expresar en un lenguaje de predicados de primer orden el conocimiento asociado a las siguientes situaciones:**

**i. Ningún dragón que viva en un zoológico es feliz. Cualquier animal que encuentre gente amable es feliz. Las personas que visitan los zoológicos son amables. Los animales que viven en zoológicos encuentran personas que visitan zoológicos.**

|  |  |
| --- | --- |
| U | U = Conjunto de todos los seres vivos |
| P | { P(x), Q(x), R(x), S(x), T(x), U(x), V(x), W(x) } |
| I | I(P(x)) = “x es un dragón”  I(Q(x)) = “x vive en un zoológico”  I(R(x)) = “x es feliz”  I(S(x)) = “x es un animal”  I(T(x)) = “x es amable”  I(U(x)) = “x es una persona”  I(V(x)) = “x visita un zoológico”  I(W(x, y)) = “x se encuentra con y” |

|  |  |
| --- | --- |
| Oración | Lenguaje de predicados |
| Ningún dragón que viva en un zoológico es feliz. | ∀(x) ( (P(x) ^ Q(x)) →(¬R(x)) ) |
| Cualquier animal que encuentre gente amable es feliz. | ∀(x) ∀(y)( (S(x) ^ U(y) ^ T(y)) → (W(x, y) → R(x)) ) |
| Las personas que visitan los zoológicos son amables. | ∀(x) ( (U(x) ^ V(x)) → (T(x)) ) |
| Los animales que viven en zoológicos encuentran personas que visitan zoológicos. | ∀(x) ∀(y) ( (S(x) ^ Q(x) ^ U(x) ^ V(x)) → (W(x, y)) ) |

**Encontrar suposiciones adicionales que permitan concluir que ningún dragón vive en un zoológico.**

Sabemos que todo animal que vive en un zoológico es feliz, ya que allí va gente amable que se encuentra con los animales. Además sabemos que ningún dragón es feliz en un zoológico. A partir de la información provista podrían sacarse una serie de suposiciones:

* Ningún dragón vive en un zoológico. Si lo hiciera, entonces sería feliz ya que es un animal.
* Los dragones no son animales.

**ii. Todo peluquero afeita a todo aquél que no se afeita a sí mismo. Ningún peluquero afeita a alguien que se afeite a sí mismo.**

|  |  |
| --- | --- |
| U | U = Conjunto de todos los hombres |
| P | { P(x), Q(x) } |
| I | I(P(x)) = “x es un peluquero”  I(Q(x, y)) = “x afeita a y” |

|  |  |
| --- | --- |
| Oración | Lenguaje de predicados |
| Todo peluquero afeita a todo aquél que no se afeita a sí mismo. | ∀(x)∀(y) (P(x) ^ ¬Q(y, y)) → (Q(x, y)) |
| Ningún peluquero afeita a alguien que se afeite a sí mismo. | ¬∃(x) ∃(y) (P(x) ^ Q(y, y)) → (Q(x, y)) |

**Con el conocimiento disponible, ¿se puede deducir que los peluqueros no existen?**

Para que los peluqueros no existan no tendría que existir ningún hombre que no se afeite a si mismo. No disponemos de este dato en el enunciado.

**iii. Si alguien hace algo bueno, ese alguien es bueno. Del mismo modo, si alguien hace algo malo, es malo. Sebastián ayuda a su madre y también miente algunas veces. Mentir es malo y ayudar es bueno.**

|  |  |
| --- | --- |
| U | U = Conjunto de todas las personas |
| P | { C1, P(x), Q(x), R(x), S(x), T(x), U(x) } |
| I | I(C1) = “Sebastián”  I(P(x)) = “x hace algo bueno”  I(Q(x)) = “x es bueno”  I(R(x)) = “x hace algo malo”  I(S(x)) = “x es malo”  I(T(x)) = “x ayuda a su madre”  I(U(x)) = “x miente” |

|  |  |
| --- | --- |
| Oración | Lenguaje de predicados |
| Si alguien hace algo bueno, ese alguien es bueno. | ∀(x) (P(x) → Q(x)) |
| Si alguien hace algo malo, ese alguien es malo. | ∀(x) (R(x) → S(x)) |
| Sebastián ayuda a su madre y también miente algunas veces. | T(C1) ^ U(C1) |

**Determinar si con el conocimiento disponible es posible deducir que Sebastián es bueno. ¿Y es posible deducir que es malo?**

La información que tenemos de Sebastián es la siguiente: “Sebastián ayuda a su madre y también miente algunas veces.”

Podemos concluir que Sebastián es bueno y es malo, ya que ayuda (lo cual es bueno) y miente (lo cual es malo). Nunca se dijo que no se podía ser las 2 cosas al mismo tiempo.

**Ejercicio 4.**

**Dar interpretaciones para los siguientes lenguajes de primer orden, y traducir en cada caso las fórmulas presentadas a oraciones apropiadas en lenguaje natural.**

La idea es poner cualquier que se nos ocurra. Cada vez que se define una interpretación es importante definir el universo (dominio), y definir los predicados

**i. ∀(x)∀(y)(A21(x, y)→A21(y, x))**

|  |  |
| --- | --- |
| **Símbolos** | P2 será el símbolo de predicado para representar la suma de dos números naturales. |
| **U** | U = N |
| **P** | { P2 } |
| **I** | I(P2(x, y)) = “x + y = z” |
| “Para todo número natural “x” e “y” se cumple que la suma entre estos es conmutativa” | |

**ii. ∀ (x) P(x, x)**

|  |  |
| --- | --- |
| **U** | U = N |
| **P** | { P1 } |
| **I** | I(P2(x,y)) = “x = y” |
| “Todo número natural es igual a sí mismo” | |

**iii. ∀(x)∀(y)∀(z)((x, y)^(y, z) → (x, z))**

|  |  |
| --- | --- |
| **Símbolos** | P2 será el símbolo de predicado para representar la comparación ≥ entre dos números naturales |
| **U** | U = N |
| **P** | { P2 } |
| **I** | I(P2(x, y)) = “x ≥ y” |
| “Para todo número natural “x” si se cumple que x es mayor o igual a un número natural “y” e “y” a su vez es mayor o igual a otro número natural “z” entonces “x” es mayor o igual a “z” | |

**iv.** ∀**(x)((x, c) → (x, f(y)))**

|  |  |
| --- | --- |
| **Símbolos** | “y” y “c” serán símbolos de constantes, donde “y” es un número natural y “c” es el doble de dicho número.  f1 será el símbolo de función para obtener el doble de un número.  P2 será el símbolo de predicado para representar la operación de suma entre dos números. |
| **U** | U = N |
| **F** | { f1 } |
| **P** | { P2 } |
| **I** | I(c) = 2  I(f1(y)) = y \* 2  I(c) = f1(2) = 4  I(P2(x, y)) = “x + y” |
| “La suma de un número consigo mismo nos da el mismo resultado que multiplicar dicho número por 2” | |

**v.** ∀**(x)** ¬ **(x, x)**

|  |  |
| --- | --- |
| **Símbolos** | “-” Es el símbolo que usaremos para identificar la resta  c es el símbolo que usaremos para identificar el 0 |
| **U** | U = N |
| **P** | { P1 } |
| **I** | I(P1(x)) = “x - x = c” |
| “La resta de un número natural consigo mismo da como resultado 0” | |

**vi.** ∀**(x)**∀**(y) (x, y)**

|  |  |
| --- | --- |
| **Símbolos** | P2 será el símbolo de predicado para representar la operación de suma entre dos números. |
| **U** | U = N |
| **P** | { P2 } |
| **I** | I(P2(x, y)) = “x + y” |
| “Todo número natural puede sumarse con otro número natural” | |

**Definiciones importantes para hacer el trabajo:**

*“Un predicado es “lo que se afirma de un sujeto en una proposición” (D.R.A.E.). Los predicados pueden definir propiedades sobre uno, dos, o más individuos (u objetos), establecen relaciones entre ellos.”*

*“Enunciados como “8 es menor que 10” y “10 es mayor que 8”, en la lógica proposicional sólo pueden representarse como elementos atómicos. De este modo no podríamos expresar ideas tan sencillas como: “si x es menor que y entonces y es mayor que x”.*

*La lógica de predicados en cambio nos permite representar las relaciones “menor que” y “mayor que””.*

*“La gramática del lenguaje define dos clases de elementos, por un lado los términos, que son las expresiones que denotan los objetos del dominio, y por el otro las fórmulas bien formadas, con las que se expresan las relaciones entre los objetos.”*

*“Una fórmula es abierta si contiene algún símbolo de variable libre, y cerrada si todos los símbolos de variables están ligados.”*

*“En la lógica proposicional la satisfacción de un enunciado depende de la interpretación de las variables de enunciado (p, q, r, etc). En la lógica de predicados tenemos que considerar también la valoración de los términos.”*

*“Para denotar que una fórmula A se satisface con una interpretación I y una valoración v, escribiremos |= I,v A.”*

